

МИНИСТЕРСТВО НА ОБРАЗОВАНИЕТО И НАУКАТА
КОМИСИЯ ЗА ПРОВЕЖДАНЕ НА ОЛИМПИАДАТА ПО АСТРОНОМИЯ

XVIII НАЦИОНАЛНА ОЛИМПИАДА ПО АСТРОНОМИЯ

<http://astro-olymp.org>

IV кръг, 12 юли 2015 г., х. Бузлуджа, теоретичен тур

Старша възраст

Задача 1. Двойна звезда. Авторитетният астроном Стефан Иванов посвещава 60-годишната си професионална кариера в изследване на двойна звезда, съставена от компоненти, чиито видими звездни величини са 3^m и 8^m . Чрез прецизни и системни наблюдения той определя, че видимото ъглово отстояние между тях се изменя от $1''$ до $5''$ с период 50 години. Лъчевата скорост на слабата компонента спрямо Слънцето се изменя с амплитуда ± 5 km/s, а на ярката - с амплитуда ± 1 km/s.

• Считайки двете орбити за кръгови, намерете масите и светимостите на двете звезди.

• Какво би трябвало да е компетентното мнение на знаменития астроном за техните физически характеристики?

Решение:

А) Нека да означим с V_1 и V_2 наблюдаваните амплитуди на лъчевите скорости.

По условие орбитите на двете звезди около общия център на масите са кръгови. При това положение, ако лъчът на зрение лежеше точно в орбиталната равнина, то би трябвало минималното раздалечаване между тях да е 0, а максималното – равно на радиуса на относителната орбита. От това, че минималното разстояние $\theta_{\min}$ между тях не е 0, можем да заключим, лъчът на зрение сключва с орбиталната равнина някакъв ъгъл α . Означаваме максималното видимо раздалечаване с $\theta_{\max}$.

Следователно:

$$\sin(\alpha) = \frac{\theta_{\min}}{\theta_{\max}} = \frac{1}{5}$$

От тук намираме, че $\alpha \approx 11,5^\circ$.

От тук можем да намерим големините на орбиталните скорости на двете компоненти са:

$$u_1 = \frac{V_1}{\cos(\alpha)} \approx 1,02 \text{ km/s}$$

$$u_2 = \frac{V_2}{\cos(\alpha)} \approx 5,10 \text{ km/s}$$

Относителната орбитална скорост е $u=6,12$ km/s

Казано е, че периодът с който видимото разстояние между звездите е 50 години.

Следователно, можем да заключим, че орбиталният период на системата е $T=100$ г, защото в рамките на един период имаме две максимални сближавания и раздалечавания.

От тук можем да намерим, че радиусът на относителната орбита е:

$$a = \frac{u \cdot T}{2\pi} = 20,5 \text{ AU}$$

Използвайки третия закон на Кеплер, намираме пълната маса на системата:

$$M = \frac{a_{[AU]}^3}{T_{[r]}^2} = 0.9 M_{SUN}$$

Орбиталните скорости се отнасят както 1:5. Това означава, че така трябва да се отнасят и масите на звездите, като по-леката компонента има по-голяма орбитална скорост.

Използвайки горното съображение и вече намерената сумарна маса на системата, пресмятаме, че масите на звездите са:

$$M_1 = 0.75 M_{SUN} \text{ и } M_2 = 0.15 M_{SUN}$$

Най-голямото видимо раздалечаване на звездите съответства на ъгъла под който се вижда диаметъра на относителната им орбита, който е равен на $2.a = 41 \text{ AU}$.

За разстоянието до системата можем да запишем:

$$r[pc] = \frac{a[AU]}{\theta_{max}["]} = 4.1 pc$$

Ако означим с m_1 и m_2 видимите звездни величини на двете компоненти, то абсолютните им звездни величини са:

$$M_1 = m_1 - 5 \lg(r[pc]) + 5 \approx 4.93^m \text{ и}$$

$$M_2 = m_2 - 5 \lg(r[pc]) + 5 \approx 9.93^m.$$

Имайки предвид, че абсолютната звездна величина на Слънцето е 4.8^m , можем да направим извода, че по-ярката компонента има светимост равна на приблизително 0.8 слънчеви светимости, а светимостта на по-слабата е около 1% от тази на Слънцето.

Б) Можем да допуснем, че и двете звезди принадлежат на Главната последователност.

Ако това е вярно, то по-масивната компонента е звезда, която е малко по-хладна и маломасивна от Слънцето. Вероятно тя принадлежи към спектрален клас К. По-маломасивната звезда има маса и светимост, които са типични за хладно червено джудже от спектрален клас М.

Критерии за оценка (18т.):

А) -За съобразяване на наклона на лъча на зрение към орбиталната равнина – 3т.

- За намиране на ъгъла под който гледаме системата – 1т.

- За намиране на истинските орбитални скорости – 2т.

- За съобразяване на периода – 1т.

- За изчисляване на масата на системата и индивидуалните маси – 3т.

- За пресмятане на разстоянието до системата – 2т.

- За намиране абсолютните звездни величини и светимостите - 3т.

Б) – Адекватен коментар за физическите характеристики на звездите – 3т.

Задача 2. Венера в елонгация.

• Каква е лъчевата скорост на Венера в максимална източна елонгация? А в максимална западна елонгация? Радиусът на орбитата на Венера е 0.7 AU.

• Какъв трябва да бъде ексцентricитетът на венерианската орбита, така че около момента на максимална източна елонгация Венера да се отдалечава от Земята?

Считайте, че двете планети се движат по орбити, лежащи в една равнина, като за първото подусловие приемете, че те са кръгови.

Решение:

А) Нека да означим с r_E и r_V радиусите на Земята и Венера, а с V_E и V_V съответните им скорости. На чертежа е представена подредбата на двете планети и Слънцето в момента в който Венера се намира в максимална източна елонгация, относно Земята.

Ако с V_E' означим компонентата на земната скорост по правата, която свързва двете планети, то от подобие на двата заштриховани триъгълника следва следното равенство:

$$V_E' = \frac{r_V}{r_E} V_E = 21,6 \text{ km/s}$$

Това е скоростта с която Земята „бяга“ от Венера. Следователно, можем да заключим, че големината на търсената лъчева скорост на Венера в този момент от време е:

$$V_r = V_V - \frac{r_V}{r_E} V_E = 13,4 \text{ km/s}$$

При максимална източна елонгация Венера се приближава към Земята, поради което нейната лъчева скорост е отрицателна, т.е. е равна на **-13,4 km/s**. При максимална западна елонгация, геометричното разположение на планетите е същото, но Венера се отдалечава от нашата планета. Лъчевата ѝ скорост относно нас е същата по големина, но с обратен знак или **+13,4 km/s**.

Б) Нека да означим с e търсения ексцентрицитет на венерианската орбита.

Скоростта на Венера в момента на максималната елонгация е нейната афелийна скорост, която можем да изразим по следния начин:

$$V_A = \sqrt{\frac{GM_{SUN}}{r_V}} \cdot \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = V_V \sqrt{\frac{1-e}{1+e}}$$

В този случай можем да забележим, че са налице аналогично подобни триъгълници, както в предното подусловие, когато разглеждахме кръгови орбити. Тук, компонентата на земната скорост по лъча на зрение към Венера може да се изрази по следния начин:

$$V_E'' = \frac{r_V(1+e)}{r_E} V_E$$

Следователно, лъчевата скорост на Венера, относно Земята е:

$$V_r'' = V_A - \frac{r_V(1+e)}{r_E} V_E = V_V \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} - \frac{r_V(1+e)}{r_E} V_E$$

За да е изпълнено условието на задачата трябва:

$$V_r'' = 0$$

или

$$V_V \sqrt{\frac{1-e}{1+e}} = \frac{r_V(1+e)}{r_E} V_E$$

Понеже:

$$\frac{V_E}{V_V} = \sqrt{\frac{r_V}{r_E}},$$

то полученото уравнение може да се преобразува до:

$$\left(\frac{r_E}{r_V}\right)^3 (1 - e) = (1 + e)^3$$

Тук е разумно да заместим отношението на големите полуоси на двете орбити с неговата числена стойност, при което уравнението придобива вида:

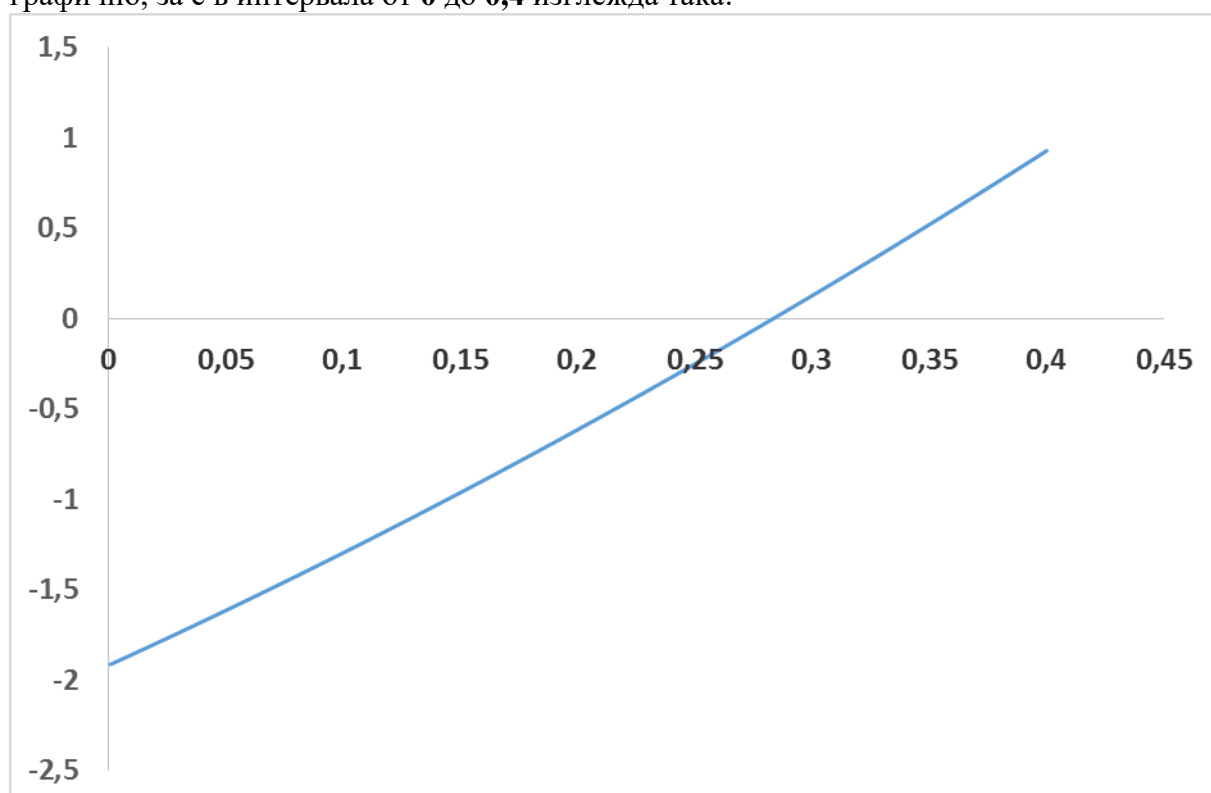
$$2,92 \cdot (1 - e) = (1 + e)^3$$

След разкриване на скобите:

$$e^3 + 3e^2 + 5,92e - 1,92 = 0$$

Полученото уравнение от трета степен може да се реши аналитично, ако използваме формулата на Кардано. Този метод е точен, но е твърде вероятно да има някакъв приближен начин по който крайният резултат се получава с разумна точност.

Първият метод по който можем да подходим е да пресметнем полинома, който е в дясната страна на равенството за някакви стойности на e . Този полином, представен графично, за e в интервала от 0 до 0,4 изглежда така:



От получената графика виждаме, че той пресича ординатната ос приблизително в $e=0,28$. Това е нашият резултат за търсения ексцентрицитет.

Разбира се, по подобен начин можем да намерим търсения резултат, използвайки метода на разполовяването (известен от съвременните часове по информатика като двоично търсене). Участникът може да пресметне последователно стойностите на полинома за $e=0,1; 0,2; 0,3$ и т.н. като при това забележи, че между 0,2 и 0,3 той се сменя знака. Това означава, че явно между тези две стойности е търсеното решение. След което се пресмята стойността на полинома за 0,25 и се вижда, че тя отново е отрицателна и това показва, че решението е между 0,25 и 0,30. На следващата стъпка се пресмята изразът за 0,275, което е много близко до истинското решение. Този процес може да продължи неограничено дълго като колкото повече стъпки правим толкова по-точно намираме решението. В нашия случай с 4 стъпки се доближаваме на по-малко от 0,01 от това, което се получава графично.

Друг начин по който можем да подходим е да пренебрегнем кубичния член в уравнението. Причината за това е, фактът, че афелийното разстояние на Венера не може да бъде по-голямо от радиуса на земната орбита. Така се получава, че максималната възможна стойност на търсения эксцентрицитет е **0,43**. Ако пресметнем всички събираеми за тази най-голяма възможна стойност на e , то виждаме, че всички те са десетки пъти по-големи от кубичния член. Следователно, можем да го пренебрегнем и да решаваме най-обикновено квадратно уравнение с коефициенти: **$a=3$; $b=5,92$ и $c=-1,92$** . Неговото решение е **0,283**, което е много близко до получения с преходните методи резултат.

Критерии за оценка (20т.):

- А) – За правилна геометрична постановка на задачата (подходяща схема или нещо друго показващо разбиране на взаимното положение на двете планети) – 2т.
 - За правилен математически метод за намиране на лъчевата скорост в максимална елонгация и краен израз – 4т.
 - За правилен числен резултат на абсолютната стойност на лъчевата скорост – 1т.
 - За правилни съображения относно знака на тази лъчева скорост в различните максимални елонгации – 2т.
 Б) – За изразяване на афелийната скорост на Венера – 2т.
 - За правилно геометрично изразяване на лъчевата скорост на Венера в този случай – 4т.
 - За получаване на уравнението, от което се определя эксцентрицитетът – 2т.
 - За правдоподобен и добре обоснован метод за решаването му – 2т.
 - За правилен числен резултат – 1т.

Задача 3. Бягство от звезден куп. Масивните рентгенови двойни звезди са тесни двойни системи с масивна звездна компонента и компактен обект (неутронна звезда или черна дупка). Поради приливните сили, материя от масивната звезда изтича през точката L1 в акреционен диск около компактния обект. При падането си тази материя се нагрива до стотици милиони градуси и излъчва в рентгеновия диапазон.

Двойната звезда Мירו (от Сопот) 2106+34 е съставена от равни по маса звезда от спектрален клас O9V и черна дупка. Компонентите на собственото движение на двойната система са $(\mu_\alpha \cos \delta, \mu_\delta) = (-5.7, -3.1)$ mas/yr (*хилядни от дъговата секунда за година*), а разстоянието до нея е 3200 pc. Орбиталният период на системата е 5.578 d, а линията HeI (6678Å) в спектъра на звездата от клас O периодично мени положението си с 4.21 Å. Эксцентрицитетът на орбитата е пренебрежимо малък.

Смята се, че системата се е родила в разсеян куп и несиметричното избухване на главната компонента като свръхнова ѝ е придало импулс, вследствие на който тя е излетяла от купа. Този импулс може да бъде не по-голям от $1000 M_{\text{sol}} \text{ km/s}$ ($M_{\text{sol}} = 2.0 \times 10^{30} \text{ kg}$). Кандидати за произхода на системата са куповете Федя 26 и Емо 182. При връщане на пространствените скорости на обектите назад във времето, рентгеновата двойна звезда е съвпадала по положение с всеки от двата купа. Разстоянията от нас до двата купа се оценяват на ~3 kpc. Собствените им движения са $(\mu_\alpha \cos \delta, \mu_\delta) = (-4.7, -1.4)$ mas/yr за Федя 26 и $(\mu_\alpha \cos \delta, \mu_\delta) = (-6.2, -2.7)$ mas/yr за Емо 182. Ъгловите разстояния до Мירו 2106+34 са 3.6 и 6.5 градуса, от Федя 26 и Емо 182 съответно.

• Може ли рентгеновата двойна система Мירו 2106+34 да се е образувала в някой от двата купа и ако да – в кой? Или може в кой да е от двата? Обосновете се.

4 задача. Два астероида. Предстои да се наблюдава окултация (покритие) на един астероид от друг астероид. Първият астероид е от групата на троянците, а вторият има радиус на орбитата 4.000 AU. Троянецът има орбитална скорост, равна на средната скорост на астероидите троянци. В нощта на наблюденията астероидите се движат успоредно на небесния екватор, имат една и съща деклинация и се намират в опозиция. Наблюденията се извършват от Калина Стоименова, смел и неуморим оператор на 2м телескоп на НАО-Рожен, докдето тя се е изкачила в дълбок сняг с тежка раница на гърба. Телескопът има фокусно разстояние 16000 mm. За получаване на изображенията се използва CCD камера VersArray:1300B, която има матрица 1340x1300 пиксела. Пикселите са квадратни с размер 20 микрона. В първото изображение двата астероида са разположени на един ред пиксели, като центърът на изображението на първия астероид е върху пиксела с номер 557, а изображението на втория – върху пиксел с номер 500. Номерацията на пикселите нараства в западна посока.

- След колко време ще се случи взаимното покритие на астероидите?
- Върху кой пиксел ще се проектира центърът на изображението на двата астероида в момента на покритието? Телескопът следи полето с астероидите, като изображенията на звездите не променят своите положения по CCD матрицата.

Справочни данни:

Радиус на орбитата на Юпитер – 5.203 AU

1 AU – 149 600 000 km

1 звездна година – 365^d.2564

5 задача. Пасаж на Луната. От Венера се наблюдава централен пасаж на Луната по диска на Земята.

- Определете амплитудата на промяна на блясъка на системата Земя-Луна по време на пасажа.
- Определете продължителността на отделните етапи на пасажа, т.е. времената от първи контакт до втори контакт и т.н.
- Начертайте кривата на блясъка, която ще се наблюдава от Венера, като използвате подходящ мащаб на осите на звездната величина и времето.

Приемете, че всички тела се движат в една равнина по кръгови орбити.

При определяне на амплитудата на звездните величини, приемете, че Земята и Луната са на еднакво разстояние от Слънцето и Венера.

Справочни данни:

Радиус на Земята – 6370 km

Алbedo на Земята – 0.37

Радиус на Луната – 1738 km

Орбитален период на Луната – 27^d.32

Радиус на лунната орбита – 384400 km

Алbedo на Луната – 0.12

Радиус на орбитата на Венера – 0.72 AU

1 AU – 149 600 000 km